УДК 517.911, 517.968

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ. Часть 5

©А.И. Булгаков, Е.В. Корчагина, О.В. Филиппова

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение, импульсные воздействия, выпуклость по переключению значений (разложимость).

Изучены функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями, с оператором не обладающим свойством выпуклости по переключению значений.

Рассмотрено функционально-дифференциальное включение с импульсными воздействиями, с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений. С помощью понятия выпуклой по переключению оболочки множества сформулировано понятие обобщенного решения функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями, правая часть которого не обладает свойством выпуклости по переключению значений. Доказано, что для задачи Коши с вольтерровым по А.Н. Тихонову оператором локальное обобщенное решение существует и оно продолжаемо. На основе топологических свойств овыпукленного по переключению отображения изучены свойства обобщенного решения задачи Коши.

Обозначим через $\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ ($Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$) множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению (непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями) подмножеств пространства $\mathbf{L}_1^n[a,b]$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть Φ – непустое подмножество пространства $\mathbf{L}_1^n[a,b]$. Обозначим через $sw\Phi$ совокупность всевозможных конечных комбинаций

$$y = \chi(\mathcal{U}_1)x_1 + \chi(\mathcal{U}_2)x_2 + \ldots + \chi(\mathcal{U}_m)x_m, \tag{0}$$

элементов $x_i \in \Phi, i = 1, 2, \ldots, m,$ где непересекающиеся измеримые подмножества $\mathcal{U}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$ отрезка $[a,b]$, удовлетворяют условию $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathcal{U}_i = [a,b]$. Пусть, далее, $\overline{sw}\Phi$ – замыкание множества $sw\Phi$ в пространстве $\mathbf{L}_1^n[a,b]$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{1}$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)),\ k = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

где отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией. Отметим, что правая часть включения (111) может не обладать свойством выпуклости по переключению значений. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ k = 1, 2, ...m$ непрерывны, $\Delta x(t_k) = x(t_k+0) - x(t_k)$, $k = 1, 2, ...m.$

О п р е д е л е н и е 2. Под *обобщенным решением задачи* (1)-(3) будем понимать функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такое $q \in \overline{sw}\Phi(x)$, что при всех $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^{m} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{4}$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k = 1, ...m$ удовлетворяют равенствам (2).

Отметим, что согласно [1], если множество $\Phi(x)$ в (1) выпукло по переключению, то обобщенное решение задачи (1)-(3) совпадает с классическим решением (см. [2]).

Отметим также, что к задаче (1)-(3) сводятся, например, математические модели сложных многокомпонентных систем автоматического управления с импульсными воздействиями, в которых в связи с отказом того или иного устройства объект регулирования переходит с одного закона управления на другой (регулируется разными правыми частями). Так как отказы (переключения) могут происходить в любые моменты времени, и при этом должно быть гарантировано управление объектом, то модель должна учитывать все возможные траектории (состояния), соответствующие любым переключениям. Обобщенные решения задачи (1)-(3) и составляют множество всех таких траекторий.

По заданному отображению $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ определим многозначный оператор $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ равенством

$$\widetilde{\Phi}(x) = \overline{sw}\Phi(x). \tag{5}$$

Отображение $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ будем называть *«овыпукленным» по переключению отображением.*

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить (см. [3]), что оператор Φ *вольтерров по А.Н. Тихонову* (или *вольтерров*), если из условия $x|_\tau = y|_\tau$, $\tau \in (a,b)$, следует равенство $(\Phi(x))|_\tau = (\Phi(y))|_\tau$, где $z|_\tau-$ сужение функции $z \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ на отрезок $[a,\tau]$, $(\Phi(z))|_\tau-$ множество сужений функций из множества $\Phi(z)$ на отрезок $[a,\tau]$.

Рассмотрим отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$. Пусть $\mathcal{U}$ — измеримое множество отрезка $[a,b]$. Определим отображение $\Phi_{\mathcal{U}}$ из $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ в $Q(\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U}))$ следующим образом: каждое значение $\Phi_{\mathcal{U}}(x)$ состоит из всех сужений на $\mathcal{U}$ функций множества $\Phi(x)$.

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что *отображение* $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *непрерывно* (*полунепрерывно снизу, полунепрерывно сверху*) *аппроксимируется в* $\mathbf{L}_\infty^n[a,b]$ *на множестве* $K \subset \mathbf{C}^n[a,b]$, если для любого $\nu > 0$ существует такое измеримое множество $\mathcal{U}_\nu \subset [a,b]$, что выполнены следующие условия: $\mu([a,b] \setminus \mathcal{U}_\nu) < \nu$; для любого $x \in K$ множество $\Phi_\nu(x) \in 2^{\mathbf{L}_\infty^n(\mathcal{U}_\nu)}$, здесь $\Phi_\nu \equiv \Phi_{\mathcal{U}_\nu}$; отображение $\Phi_\nu : K \to 2^{\mathbf{L}_\infty^n(\mathcal{U}_\nu)}$ непрерывно (полунепрерывно снизу, полунепрерывно сверху) по Хаусдорфу.

Далее предположим, что оператор $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ (правая часть включения (1)) вольтерров и полунепрерывно снизу аппроксимируется в $\mathbf{L}_\infty^n[a,b]$ на каждом предкомпактном множестве из пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Из этого условия вытекает, что овыпукленный по переключению оператор $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенный равенством (5), вольтерров и полунепрерывен снизу (см. [1]).

Пусть $\tau \in (a,b]$. Определим непрерывное отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ равенством

$$(V_\tau(x))(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad t \in [a,\tau]; \\ x(\tau), & \text{если} \quad t \in (\tau,b]. \end{cases} \tag{6}$$

О п р е д е л е н и е 5. Будем говорить, что функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ является *обобщенным решением задачи* (1)-(3) *на отрезке* $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$, если существует такое $q \in (\widetilde{\Phi}(V_\tau(x)))|_\tau$, что функция $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k: t_k \in [a,\tau]} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{7}$$

где отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ определено равенством (6), $\Delta(x(t_k))$ $(k : t_k \in [a,\tau])$ удовлетворяют равенствам (2).

Далее, будем говорить, что функция $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ является *обобщенным решением задачи* (1)-(3) *на* $[a,c)$, если для любого $\tau \in (a,c)$ сужение $x|_\tau \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$, и найдется такая функция $q : [a,c) \to \mathbb{R}^n$, что для любого $\tau \in [a,c)$ $q|_\tau \in (\widetilde{\Phi}(V_\tau(x)))|_\tau$ и для любого $t \in [a,c)$ имеет место равенство (7), где $t_k \in [a,c)$.

Обобщенное решение $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (1)-(3) будем называть *непродолжаемым*, если не существует такого обобщенного решения y задачи (1)-(3) на $[a,\tau]$, (здесь $\tau \in (c,b]$, если $c < b$ и $\tau = b$, если $c = b$), что для любого $t \in [a,c)$ выполнено равенство $x(t) = y(t)$.

Обобщенное решение задачи (1)-(3) считается *непродолжаемым.*

Пусть для каждого $\tau \in (a,b]$ непрерывный оператор $\Lambda_\tau : \mathbf{L}_1^n[a,\tau] \to \mathbf{C}^n[a,\tau]$ имеет вид

$$(\Lambda_\tau z)(t) = x_0 + \int\limits_a^t z(s)ds, \quad t \in [a,\tau]. \tag{8}$$

Определим отображение $\mathfrak{A}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ равенством

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}_\tau(x) \ = \ \Big\{ y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] : \ \textit{существует} \ \ z \in \Big(\widetilde{\Phi}(V_\tau(x))\Big)|_\tau, \\ \textit{что} \ \ \textit{при} \ \ \textit{любых} \ \ t \in [a,\tau] \ \textit{справедливо равенство} \\ y(t) = (\Lambda_\tau z)(t) + \sum_{k: t_k \le \tau} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k))\Big\},\end{gathered} \tag{9}$$

где $\Delta(x(t_k))$, $t_k \in [a,\tau]$ удовлетворяют равенствам (2), отображения $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и $\Lambda_\tau : \mathbf{L}_1^n[a,\tau] \to \mathbf{C}^n[a,\tau]$ определены формулами (6) и (8) соответственно. В дальнейшем, если $\tau = b$, то индекс в обозначении оператора $\mathfrak{A}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ опускаем.

Очевидно, что каждая неподвижная точка оператора $\mathfrak{A}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$, определенного равенством (9), является решением задачи (1)-(3) на отрезке $[a,\tau]$.

Т е о р е м а 1. *Найдется такое* $\tau \in (a,b]$, *что обобщенное решение задачи* (1)-(3) *существует на отрезке* $[a,\tau]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r > |x_0|$, где x_0- начальное условие задачи (1)-(3). Так как образ $\widetilde{\Phi}(\overline{B}_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}[0,2r])$ ограничен суммируемой функцией (см. [1]), то множество $\mathfrak{A}_{t_1}(\overline{B}_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r])$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. По теореме Арцела, множество $\mathfrak{A}_{t_1}(\overline{B}_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r])$ предкомпактно. Поэтому найдется такое $\tau \in [a,t_1]$, что для любого $y \in \mathfrak{A}_{t_1}(\overline{B}_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r])$ при каждом $t \in [a,\tau]$ выполнено неравенство

$$|y(t) - x_0| \le r. \tag{10}$$

Так как сужение функций из шара $B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r]$ на отрезок $[a,\tau]$ совпадает с шаром $B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r]$, то в силу вольтерровости оператора $\mathfrak{A}_{t_1} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}$ получаем равенство

$$\mathfrak{A}_\tau(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r]) = \Big(\mathfrak{A}_{t_1}(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r])\Big)\Big|_\tau, \tag{11}$$

где $\Big(\mathfrak{A}_{t_1}(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r])\Big)\Big|_\tau$ – множество сужений функций из множества $\mathfrak{A}_{t_1}(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r])$ на отрезок $[a,\tau]$. Следовательно, согласно равенству (11) и неравенству (10) для любого

$$z \in \mathfrak{A}_\tau(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r])$$

получаем оценку

$$\|z\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} \leq \|z - x_0\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} + |x_0| \leq 2r,$$

которая влечет вложение

$$\mathfrak{A}_\tau(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r]) \subset B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r]. \tag{12}$$

Так как отображение $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ полунепрерывно снизу (см. [1]), то найдется такое непрерывное отображение $\mathfrak{R} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}_1^n[a,b]$ такое, что для любого $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ имеет место включение $\mathfrak{R}(x) \in \widetilde{\Phi}(x)$ (см.[4]). Из равенства (11), вложения (12) и определения оператора $\mathfrak{A}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ вытекает, что

$$\Lambda_\tau(\mathfrak{R}(V_\tau(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r])))\Big|_\tau \subset B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r].$$

Так как оператор $\mathfrak{R} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}_1^n[a,b]$ ограничен, то образ $\Lambda_\tau(\mathfrak{R}(V_\tau(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r])))\Big|_\tau$ относительно компактен (предкомпактен) в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Поэтому, согласно теореме Шаудера, отображение $\Lambda_\tau(\mathfrak{R}V_\tau)\Big|_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \mathbf{L}_1^n[a,\tau]$ имеет неподвижную точку. Неподвижная точка этого произведения есть решение задачи (1)-(3) на отрезке $[a,\tau]$, т. к. $\tau \in [a,t_1]$. Теорема доказана.

В пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ справедлив аналог теоремы Арцела-Асколи.

Лемма 1. *Пусть последовательность* $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $i = 1,2,...$ *обладает следующими свойствами*:

1) *существует такая константа* $M \geq 0$, *что для любого* $i = 1,2,...$ *выполняется оценка*

$$\|x_i\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} \leq M;$$

2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *что для любых* t,τ, *принадлежащих одному из интервалов* $[a,t_1]$, $(t_1,t_2],...,$ $(t_m,b]$ *и удовлетворяющих неравенству* $|t-\tau| < \delta$, *выполняется оценка*

$$|x_i(t) - x_i(\tau)| < \varepsilon$$

для любого $i = 1,2,...$.

Тогда существует элемент $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *и существует подпоследовательность* x_{i_j}, $j = 1,2,...,$ *что*

$$\lim_{i\to\infty} \|x_{i_j} - x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = 0.$$

Т е о р е м а 2. *Для того, чтобы обобщенное решение* $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ *задачи* (1)-(3) *было продолжаемым на* $[a,\tau]$, $(\tau \in [c,b])$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\overline{\lim\limits_{t\to c-0}} |x(t)| < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если обобщенное решение $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (1)-(3) на $[a,c)$ продолжаемо на $[a,\tau]$, $(\tau \in (c,b])$, то $\overline{\lim\limits_{t\to c-0}} |x(t)| < \infty$.

Пусть теперь обобщенное решение $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (1)-(3) на $[a,c)$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{t\to c-0}} |x(t)| < \infty.$$

Покажем, что обобщенное решение x на $[a,c)$ продолжаемо. Пусть c принадлежит какому-то из полуинтервалов $(t_i,t_{i+1}]$, $i = 0,1,...,m$ ($t_0 = a$, $t_{m+1} = b$). Из определения обобщенного решения на полуинтервале $[a,c)$ найдется такая измеримая функция $q : [a,c) \to \mathbb{R}^n$, что для любого $\tau \in (a,c)$ $q|_\tau \in \Big(\widetilde{\Phi}(V_\tau(x))\Big)\big|_\tau$ и для любого $t \in [a,c)$ имеет место равенство

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^{i} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)) \tag{13}$$

(если $i = 0,$ то последняя сумма слагаемых в формуле (13) отсутствует). Для определенности будем считать, что $i \geq 1$. Так как функция $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ ограничена на $[a,c)$, то множество $V_\tau x,$ $\tau \in (a,c)$ ограничено. Это означает, что найдется такая суммируемая функция $\beta : [a,b] \to [0,\infty)$, что при почти всех $t \in [a,c)$ выполняется оценка

$$|q(t)| \leqslant \beta(t).$$

Из этой оценки вытекает, что функция $q : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ суммируема на $[a,c)$. Поэтому из равенства (13) следует, что $\lim\limits_{t\to c-0} x(t)$ существует. Ниже будем считать, что обобщенное решение $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ доопределено по непрерывности на весь отрезок $[a,c]$, а функция

$$q \in \Big(\widetilde{\Phi}(V_c(x))\Big)\Big|_c.$$

Из определения локального обобщенного решения задачи (1)-(3) вытекает, что x – обобщенное решение задачи (1)-(3) на отрезке $[a,c]$.

Далее, покажем, что обобщенное решение $x : [a,c] \to \mathbb{R}^n$ продолжаемо. Прежде всего, если $c = b$, то, как установлено выше, x продолжаемо согласно определению. Пусть теперь $c \in (a,b)$ и $c \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 0,1,...,m$. Покажем, что в этом случае обобщенное решение $x : [a,c] \to \mathbb{R}^n$ продолжаемо. Обозначим

$$\begin{gathered} U_\tau\ (x,r) = \Big\{y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] :\ \textit{для любого}\ t \in [a,c]\ \ x(t) = y(t) \\ \textit{и}\ \max_{t\in[c,\tau]} |y(t) - x(c)| \leqslant r\Big\}, \end{gathered} \tag{14}$$

где $\tau \in (c, t_{i+1})$, $r > 0$. Определим оператор $\widetilde{\Phi}_\tau : U_\tau(x,r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,\tau])$ равенством

$$\begin{gathered} \widetilde{\Phi}_\tau(y) = \ \Big\{z \in \mathbf{L}^n[a,\tau] : z = q\ \textit{на}\ [a,c]\ \textit{и существует} \\ p \in \Big(\widetilde{\Phi}(V_\tau(y))\Big)\,|_{[c,\tau]},\ \textit{что}\ z = p\ \textit{на}\ (c,\tau]\ \Big\}, \end{gathered} \tag{15}$$

где функция q из представления (13), $\Big(\widetilde{\Phi}(V_\tau(y))\Big)\,|_{[c,\tau]}$ – множество всех сужений функций из $\widetilde{\Phi}(V_\tau(y))$ на отрезок $[c,\tau]$, отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ определено равенством (6). Из определения отображения $\widetilde{\Phi}_\tau : U_\tau(x,r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,\tau])$ и выпуклости по переключению значений отображения $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,\tau])$ следует, что для каждого $y \in U_\tau(x,r)$ справедливо вложение

$$\widetilde{\Phi}_\tau(y) \subset (\widetilde{\Phi}(V_\tau(y)))\big|_\tau.$$

Так как оператор $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,\tau])$ вольтерров и полунепрерывен снизу, то и оператор $\widetilde{\Phi}_\tau : U_\tau(x,r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,\tau])$, заданный соотношением (15), вольтерров и полунепрерывен снизу. Далее определим оператор $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau : U_\tau(x,r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ равенством

$$\begin{gathered} \widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(u) = \Big\{y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] : \textit{существует}\ z \in \widetilde{\Phi}_\tau(u), \textit{что} \\ \textit{при любых}\ \ t \in [a,\tau]\ \ \textit{справедливо равенство} \\ y(t) = (\Lambda_\tau z)(t) + \sum_{k:t_k\in[a,\tau]} \chi_{(t_k,b]}\Delta(u(t_k))\Big\}, \end{gathered} \tag{16}$$

где $\Delta(u(t_k))$, $t_k \in [a,\tau]$ удовлетворяют равенствам (2), отображения $\Lambda_\tau : \mathbf{L}_1^n[a,\tau] \to \mathbf{C}^n[a,\tau]$, $\widetilde{\Phi}_\tau : U_\tau(x,r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,\tau])$ определены равенствами (8) и (15) соответственно. Так как для любого $u \in U_\tau(x,r)$ справедливо соотношение

$$(\widetilde{\Phi}_\tau(u))\big|_c = q,$$

где функция q из представления (13), то из равенств (14)–(16) следует, что для любого $u \in U_\tau(x,r)$ имеет место равенство

$$(\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(u))\big|_c = x \tag{17}$$

и вложение

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(u) \subset \mathfrak{A}_\tau(u),$$

где оператор $\mathfrak{A}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ задан равенством (9). Далее в силу того, что образ $\widetilde{\Phi}_\tau(U_\tau(x,r))$ ограничен суммируемой функцией, то найдется $\delta \in (0, \tau - c)$, что для любой функции $y \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(U_\tau(x,r))$ выполнено неравенство

$$\max_{t\in[c,\ c+\delta]} |y(t) - x(c)| \leqslant r. \tag{18}$$

Кроме того, из вольтерровости отображений $\widetilde{\Phi}_\tau : U_\tau(x,r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,\tau])$, $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau : U_\tau(x,r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$, определенных равенствами (15) и (16) соответственно, а также в силу того, что множество сужений функций из множества $U_\tau(x,r)$ на отрезок $[a, c+\delta]$ – множество $U_{c+\delta}(x,r)$, получаем равенство

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_{c+\delta}(U_{c+\delta}(x,r)) = (\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(U_\tau(x,r)))\big|_{c+\delta},$$

где $(\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(U_\tau(x,r)))\big|_{c+\delta}$ — множество сужений функций из множества $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(U_\tau(x,r))$ на отрезок $[a, c+\delta]$, отображение $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ определено равенством (16). Отсюда, согласно соотношениям (17), (18), получаем вложение

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_{c+\delta}(U_{c+\delta}(x,r)) \subset U_{c+\delta}(x,r). \tag{19}$$

Так как отображение $\widetilde{\Phi}_{c+\delta} : U_{c+\delta}(x,r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,c+\delta])$ полунепрерывно снизу, то согласно [4], существует непрерывное отображение $\mathcal{R} : U_{c+\delta}(x,r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,c+\delta])$, что для любого $u \in U_{c+\delta}(x,r)$ справедливо условие

$$\mathcal{R}(u) \in \widetilde{\Phi}_{c+\delta}(u).$$

Из определения отображений $\widetilde{\Phi}_\tau : U_\tau(x,r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,\tau])$ и $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau : U_\tau(x,r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ (см. (15), (16)) для любого $u \in U_{c+\delta}(x,r)$ имеет место включение

$$(\Lambda_{c+\delta}\mathcal{R})(u) \in \widetilde{\mathfrak{A}}_{c+\delta}(u).$$

Таким образом, из соотношения (19) следует вложение

$$(\Lambda_{c+\delta}\mathcal{R})(U_{c+\delta}(x,r)) \subset U_{c+\delta}(x,r),$$

где оператор $(\Lambda_{c+\delta}\mathcal{R}) : U_{c+\delta}(x,r) \to U_{c+\delta}(x,r)$ – произведение отображений $\Lambda_{c+\delta} : \mathbf{L}_1^n[a,c+\delta] \to \mathbf{C}^n[a,c+\delta]$ и $\mathcal{R} : U_{c+\delta}(x,r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,c+\delta])$. Так как множество $U_{c+\delta}(x,r)$ компактно в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,c+\delta]$ (см. лемму 1), то $\Lambda_{c+\delta}\mathcal{R}$ имеет неподвижную точку.

Неподвижная точка этого отображения – продолжение решения $x : [a, c] \to \mathbb{R}^n$ на отрезок $[a, c+\delta]$.

Пусть теперь $c = t_i$, $i = 1, ..., m$, т. е. совпадает с одним из моментов, в котором решение подвергается импульсу. Покажем, что и в этом случае решение $x : [a, c] \to \mathbb{R}^n$ продолжаемо. Для этого для любого $\tau \in (t_i, t_{i+1})$ и $r > 0$ определим множество

$$\widetilde{U}_\tau\ (x, r) = \Big\{ y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] :\ \textit{для любого}\ t \in [a, t_i]\ \ x(t) = y(t),$$
$$\sup_{t \in (t_i, \tau]} |y(t) - x(t_i) - I_i(x(t_i))| \leqslant r\ \textit{и}\ \lim_{t \to t_i + 0} y(t) = x(t_i) + I_i(x(t_i)) \Big\}.$$

Равенством (15) определим отображение $\widetilde{\Phi}_\tau : \widetilde{U}_\tau(x, r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a, \tau])$, в котором $c = t_i$. Аналогично равенством (16) на множестве $\widetilde{U}_\tau(x, r)$ определим оператор $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau : \widetilde{U}_\tau(x, r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$.

Так как для любого $u \in \widetilde{U}_\tau(x, r)$ справедливо соотношение

$$(\widetilde{\Phi}_\tau(u))\big|_{t_i} = q,$$

где функция q из представления (13), то из определения множества $\widetilde{U}_\tau(x, r)$ и отображений $\widetilde{\Phi}_\tau : \widetilde{U}_\tau(x, r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a, \tau])$ и $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau : \widetilde{U}_\tau(x, r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ следует, что для любого $u \in \widetilde{U}_\tau(x, r)$ имеет место равенство

$$(\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(u))\big|_{t_i} = x \tag{20}$$

и вложение

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(u) \subset \mathfrak{A}_\tau(u).$$

Далее в силу того, что образ $\widetilde{\Phi}_\tau(\widetilde{U}_\tau(x, r))$ ограничен суммируемой функцией, то найдется $\delta \in (0, \tau - t_i)$, что для любой функции $y \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(\widetilde{U}_\tau(x, r))$ выполнено неравенство

$$\sup_{t \in (t_i,\ t_i+\delta]} |y(t) - x(t_i) - I_i(x(t_i))| \leqslant r. \tag{21}$$

Кроме того, для любой функции $y \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(\widetilde{U}_\tau(x, r))$ имеет место равенство

$$\lim_{t \to t_i + 0} y(t) = x(t_i) + I_i(x(t_i)). \tag{22}$$

Из вольтерровости отображений $\widetilde{\Phi}_\tau : \widetilde{U}_\tau(x, r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a, \tau])$, $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau : \widetilde{U}_\tau(x, r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$, определенных равенствами (15) и (16) соответственно, а также в силу того, что множество сужений функций из множества $\widetilde{U}_\tau(x, r)$ на отрезок $[a, t_i + \delta]$ – множество $\widetilde{U}_{t_i+\delta}(x, r)$ получаем равенство

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_{t_i+\delta}(\widetilde{U}_{t_i+\delta}(x, r)) = (\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(\widetilde{U}_\tau(x, r)))\big|_{t_i+\delta},$$

где $(\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(\widetilde{U}_\tau(x, r)))\big|_{t_i+\delta}$ – множество сужений функций из множества $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(\widetilde{U}_\tau(x, r))$ на отрезок $[a, t_i + \delta]$, отображение $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ определено равенством (16). Отсюда согласно соотношениям (20)-(22) получаем вложение

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_{t_i+\delta}(\widetilde{U}_{t_i+\delta}(x, r)) \subset \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x, r). \tag{23}$$

Так как отображение $\widetilde{\Phi}_{t_i+\delta} : \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a, t_i+\delta])$ полунепрерывно снизу, то, согласно [4], существует непрерывное отображение $\mathcal{R} : \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a, t_i+\delta])$, что для любого $u \in U_{t_i+\delta}(x,r)$ справедливо условие

$$\mathcal{R}(u) \in \widetilde{\Phi}_{t_i+\delta}(u).$$

Из определения отображений $\widetilde{\Phi}_\tau : \widetilde{U}_\tau(x,r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,\tau])$ и $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau : \widetilde{U}_\tau(x,r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ для любого $u \in \widetilde{U}_{c+\delta}(x,r)$ имеет место включение

$$(\Lambda_{t_i+\delta}\mathcal{R})(u) \in \widetilde{\mathfrak{A}}_{t_i+\delta}(u).$$

Таким образом, из соотношения (23) следует вложение

$$(\Lambda_{t_i+\delta}\mathcal{R})(\widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r)) \subset \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r),$$

где оператор $(\Lambda_{t_i+\delta}\mathcal{R}) : \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r) \to \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r)$ – произведение отображений $\Lambda_{t_i+\delta} : \mathbf{L}_1^n[a, t_i+\delta] \to \mathbf{C}^n[a, t_i+\delta]$ и $\mathcal{R} : \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a, t_i+\delta])$. Так как множество $(\Lambda_{t_i+\delta}\mathcal{R})(\widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r))$ компактно в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, t_i+\delta]$ (см. лемму 1), то $(\Lambda_{t_i+\delta}\mathcal{R})$ имеет неподвижную точку. Неподвижная точка этого отображения – продолжение обобщенного решения x на отрезок $[a, t_i+\delta]$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. *Если* y *– обобщенное решение задачи* (1)-(3) *на* $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$, *то существует непродолжаемое решение* x *задачи* (1)-(3) *либо на* $[a,c)$ $(c \in (\tau, b])$, *либо на* $[a,b]$ *такое, что при* $t \in [a,\tau]$ *выполнено равенство* $x(t) = y(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н.* Функционально-дифференциальные включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестн. Удм. ун-та. Матем., механика. 2005. № 1. С. 3–20.

2. *Булгаков А. И.* Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 371–379.

3.*Тихонов А. Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 68. № 4. С. 1–25.

4.*Bressan A., Colombo G.* Extensions and selections of maps with decomposable values // Studia. math. 1988. V. 90. № 1. P. 69–86.

5.*Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

6. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1987.

7. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк., 1987.

9. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces, Walter de Gruyter. Berlin; New-York, 2001.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 07-01-00305, № 09-01-97503), Министерства образования и науки РФ (программа Развитие научного потенциала высшей школы, проект № 2.1.1/1131), Норвежской Национальной Программы Научных Исследований FUGE (грант PRO 06/02) при Совете научных исследований Норвегии и Норвежского Комитета по развитию университетской науки и образования(NUFU).

Поступила в редакцию 10 апреля 2009 г.

Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V. Functional-differential inclusions with impulses. Part 5. There are studied functional-differential inclusions with impulses and with operator not necesseraly convex-valued with respect to switching.

Key worlds: functional-differential inclusion; impulses; convex-valued with respect to switching.